区分線形凸計画問題に対する多項式オーダーの内点法(モデリングと最適化の理論)

小崎, 敏寛; 水野, 眞治; 中田, 和秀

数理解析研究所講究録
1526巻 2006年 198-206

区分線形凸計画問題に対する多項式オーダーの内点法

小崎　敏寛*(Toshihiro Kosaki)
東京工業大学 *(Tokyo Institute of Technology)*
水野　眞治†(Shinji Mizuno)
東京工業大学 *(Tokyo Institute of Technology)*
中田　和秀‡(Kazuhide Nakata)
東京工業大学 *(Tokyo Institute of Technology)*

2006年7月18日

概要　区分線形凸計画問題を考える．この問題に対する多項式オーダーの解法を提案する．その手法では，区分線形凸計画問題を標準形の線形計画問題に変換し，主双対内点法を適用する．アルゴリズムの多項式オーダー性を示し，ニュートン方向の計算の工夫を記述する．

キーワード: 最適化, 区分線形凸計画問題, 内点法

1. はじめに

本稿では，区分線形凸関数を等式制約と非負制約の下で最小化する問題を考える [1, 3]．この問題は，線形関数の最大値最小化問題とも呼ばれる [2]．課題としては，この問題の計算量はどのくらいであるかである．より正確に書くと，多項式オーダーの解法はあるのかということである．

本稿の構成は，以下の通りである．2節では，自由変数を持つ線形計画問題の標準形への変換を示し，変換後の問題の解から変換前の解が得られることを示す．3節では，区分線形凸計画問題の定式化を行う．2節で導入した変換を適用し，標準形に変換する．この問題に対して内点法を適用する．アルゴリズムの多項式オーダー性を示し，ニュートン方向の計算の工夫を記す．4節では，結論と今後の課題を記す．

2. 自由変数を持つ線形計画問題の標準形への変換

次の自由変数を持つ線形計画問題を考える．

$$\begin{aligned} &\min\ c^T x + f^T z \\ &\text{s.t. } Ax + Dz = b \\ &\qquad x \geq 0. \end{aligned} \tag{P}$$

ただし，定数 $A \in \Re^{m\times n}$, $b \in \Re^m$, $c \in \Re^n$, $f \in \Re^l$, $D \in \Re^{m\times l}$, 変数 $x \in \Re^n$, $z \in \Re^l$．一般性を失うことなく，行列 D がフル列ランクであると仮定できる．すると $\mathrm{rank} D = l$ である．標準

*kosaki@me.titech.ac.jp
†mizuno@me.titech.ac.jp
‡nakata@me.titech.ac.jp

形は次のようになる．

$$\begin{aligned} &\min\ c^T x + f^T z_+ - f^T z_- \\ &\text{s.t.}\ \ [A\ D\ \ -D] \begin{bmatrix} x \\ z_+ \\ z_- \end{bmatrix} = b \\ &\qquad x \geq 0\ z_+ \geq 0\ z_- \geq 0. \end{aligned} \tag{P1}$$

双対問題は次のようになる．

$$\begin{aligned} &\max\ b^T y \\ &\text{s.t.}\ A^T y \leq c \\ &\qquad D^T y = f. \end{aligned} \tag{D1}$$

内点法を適用する前の変換 $z = z_+ - z_-$ には問題点がある．それは z を一つ定めるのに z_+, z_- は一意に定まらず，反復が進むにつれて z_+, z_- が発散し，計算が不安定になることである．

主問題の自由変数に対応する双対問題の制約は等式制約になる．その等式を基底変数について解いて，目的関数，制約式に代入し非基底変数のみの双対問題を考える．この問題に対する主問題を考える変換法が半正定値計画問題に対して提案されている [5]．この手法を線形計画問題の場合に適用する．利点は，自由変数を非負変数の差と表した変数が発散し，数値的不安定になることを避けることができることである．変換した問題の解から元の問題の解を得ることができる．

行列 D の基底部分を D_B，残りの部分を D_N とする．y を D_B，D_N に対応する部分に分割し y_B，y_n とし，A を y_B，y_N に対応する部分に分割し A_B，A_N とする．b を y_B，y_N に対応する部分に分割し b_B，b_N とする．等式 $D^T y = f$ を基底変数について解くと，

$$y_B = D_B^{-T}(f - D_N^T y_N). \tag{2.1}$$

目的関数に代入すると，

$$\begin{aligned} b^T y &= b_B^T D_B^{-T}(f - D_N^T y_N) + b_N^T y_N \\ &= (b_N^T - b_B^T D_B^{-T} D_N^T) y_N + b_B^T D_B^{-T} f, \end{aligned} \tag{2.2}$$

制約式に代入すると，

$$A_B^T D_B^{-T}(f - D_N^T y_N) + A_N^T y_N \leq c. \tag{2.3}$$

双対問題は次のようになる．

$$\begin{aligned} &\max\ (b_N^T - b_B^T D_B^{-T} D_N^T) y_N + b_B^T D_B^{-T} f \\ &\text{s.t.}\ (A_N^T - A_B^T D_B^{-T} D_N^T) y_N \leq c - A_B^T D_B^{-T} f. \end{aligned} \tag{D2}$$

主問題は次のようになる．

$$\begin{aligned} &\min\ (c - A_B^T D_B^{-T} f)^T x + b_B^T D_B^{-T} f \\ &\text{s.t.}\ (A_N - D_N D_B^{-1} A_B) x = b_N - D_N D_B^{-1} b_B \\ &\qquad x \geq 0. \end{aligned} \tag{P2}$$

変換後の主問題の解を x^*，変換後の双対問題の解を y^* とすると，元の問題の解 (x, z), (y_B, y_N) はそれぞれ $(x^*, D_B^{-1}(b_B - A_B x^*))$, $(D_B^{-T}(f - D_N^T y^*), y^*)$ で与えられる．

3. 区分線形凸計画問題の定式化

次の区分線形凸計画問題 [1] を主双対内点法で解くことを考える.

$$
\begin{aligned}
&\min_{x} \max_{i=1,\dots,l} \left(c_i^T x + d_i\right) \\
&\quad \text{s.t. } Ax = b \\
&\qquad\quad x \geq 0.
\end{aligned}
\tag{P}
$$

ただし, 定数は $A \in \Re^{m\times n}$, $b \in \Re^m$, $c_i \in \Re^n$, $d_i \in \Re$, 変数は $x \in \Re^n$. この問題は変数 $t \in \Re$ を使うと次の線形計画問題に書ける.

$$
\begin{aligned}
\min\ & t \\
\text{s.t. } & c_i^T x + d_i \leq t\ i = 1, \dots, l \\
& Ax = b \\
& x \geq 0.
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$

標準形になおすと次のようになる.

$$
\begin{aligned}
&\min t_+ - t_- \\
&\text{s.t.} \begin{bmatrix} A & 0 & 0 & 0 \\ c_1^T & -1 & 1 & 1\,0\dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_i^T & -1 & 1 & \dots 1 \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_l^T & -1 & 1 & \dots 0\,1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ t_+ \\ t_- \\ s_1 \\ \vdots \\ s_i \\ \vdots \\ s_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ -d_1 \\ \vdots \\ -d_i \\ \vdots \\ -d_l \end{bmatrix} \\
&\qquad x \geq 0,\ t_+ \geq 0,\ t_- \geq 0,\ s_i \geq 0\ i = 1, \dots, l.
\end{aligned}
\tag{3.2}
$$

双対問題は次のようになる.

$$
\begin{aligned}
\max\ & b^T y - \sum_{i=1}^{l} d_i u_i \\
\text{s.t. } & A^T y + \sum_{i=1}^{l} c_i u_i \leq 0 \\
& \sum_{i=1}^{l} u_i = -1,\ u_i \leq 0\ i = 1, \dots, l.
\end{aligned}
\tag{D}
$$

主問題は自由変数を持つ. 単純な変換法として, 自由変数を非負変数の差として表す手法がある. この手法は, 変数が発散するため数値的不安定になる欠点を持つ. この欠点を回避する手法を適用する.

3.1. 新しい変換法

$u_l = -1 - \sum_{i \neq l} u_i\ (\leq 0)$ として目的関数，制約式に代入すると，

$$
\begin{aligned}
b^T y - \sum_i d_i u_i &= b^T y - \sum_{i \neq l} d_i u_i - d_l \left(-1 - \sum_{i \neq l} u_i \right) \\
&= b^T y + \sum_{i \neq l} (d_l - d_i) u_i + d_l,
\end{aligned}
\tag{3.3}
$$

$$
\begin{aligned}
A^T y + \sum_i c_i u_i &= A^T y + \sum_{i \neq l} c_i u_i + c_l \left(-1 - \sum_{i \neq l} u_i \right) \\
&= A^T y + \sum_{i \neq l} (c_i - c_l) u_i - c_l.
\end{aligned}
\tag{3.4}
$$

問題 (D) は次のように書ける．

$$
\begin{aligned}
\max\ & b^T y + \sum_{i \neq l} (d_l - d_i) u_i + d_l \\
\text{s.t.}\ & A^T y + \sum_{i \neq l} (c_i - c_l) u_i \leq c_l \\
& - \sum_{i \neq l} u_i \leq 1 \\
& u_i \leq 0,\ i = 1, \ldots, l-1.
\end{aligned}
\tag{D1}
$$

対応する主問題は次のように書ける．

$$
\begin{aligned}
\min\ & c_l^T x + s_l + d_l \\
\text{s.t.}\ & Ax = b \\
& (c_1 - c_l)^T x + s_1 - s_l = d_l - d_1 \\
& \vdots \\
& (c_i - c_l)^T x + s_i - s_l = d_l - d_i \\
& \vdots \\
& (c_{1-1} - c_l)^T x + s_{l-1} - s_l = d_l - d_{l-1} \\
& x \geq 0,\ s_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, l.
\end{aligned}
\tag{P1}
$$

スラック変数を導入する．

$$
v_x := c_l - A^T y - \sum_{i \neq l} (c_i - c_l) u_i \tag{3.5a}
$$

$$
v_{s_i} := -u_i\ i = 1, \ldots, l-1 \tag{3.5b}
$$

$$
v_{s_l} := 1 + \sum_{i \neq l} u_i. \tag{3.5c}
$$

最適条件は次のようになる.

$$
\begin{aligned}
Ax &= b, \\
(c_1 - c_l)^T x + s_1 - s_l &= d_l - d_1, \\
&\vdots \\
(c_i - c_l)^T x + s_i - s_l &= d_l - d_i, \\
&\vdots \\
(c_{1-1} - c_l)^T x + s_{l-1} - s_l &= d_l - d_{l-1}, \\
x \geq 0 \ s_i &\geq 0 \ i = 1, \dots, l, \\
A^T y + \sum_{i \neq l} (c_i - c_l) u_i + v_x &= c_l, \\
-\sum_{i \neq l} u_i + v_{s_l} &= 1, \\
u_i + v_{s_i} &= 0 \ i = 1, \dots, l-1, \\
v_x \geq 0, \ v_t \geq 0, \ v_{s_i} &\geq 0 \ i = 1, \dots, l-1, \\
x^T v_x &= 0, \\
s_i v_{s_i} &= 0 \ i = 1, \dots, l.
\end{aligned}
\tag{3.6}
$$

変換後の主問題の最適解を $(x^*, s_1^*, \dots, s_i^*, \dots, s_{l-1}^*, s_l^*)$ として，元の主問題の最適解は

$$
(x, t, s_1, \dots, s_i, \dots, s_l) = (x^*, c_l^T x^* + s_l^* + d_l, s_1^*, \dots, s_i^*, \dots, s_l^*) \tag{3.7}
$$

と得られる．変換後の双対問題の最適解を $(y^*, u_1^*, \dots, u_i^*, \dots, u_{l-1}^*)$ として，元の双対問題の最適解は

$$
(y, u_1, \dots, u_i, \dots, u_l) = (y^*, u_1^*, \dots, u_i^*, \dots, -1 - \sum_{i \neq l} u_i^*) \tag{3.8}
$$

と得られる.

問題のサイズからショートステップ法 (例えば Algorithm SPF[6]) で $O(\sqrt{n+l}L)$ 反復である．以下でこのことを確かめる.

次の表記を使う.

$$
\tilde{x} := \begin{bmatrix} x \\ s_1 \\ \vdots \\ s_i \\ \vdots \\ s_{l-1} \\ t \end{bmatrix}, \ \tilde{y} := \begin{bmatrix} y \\ u_1 \\ \vdots \\ u_i \\ \vdots \\ u_{l-1} \end{bmatrix}, \ \tilde{s} := \begin{bmatrix} v_x \\ v_{s1} \\ \vdots \\ v_{si} \\ \vdots \\ v_{sl-1} \\ v_t \end{bmatrix}, \tag{3.9}
$$

$$\tilde{A} := \begin{bmatrix} A & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ (c_1 - c_l)^T & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & -1 \\ \vdots & & \ddots & & & & \vdots \\ (c_i - c_l)^T & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & -1 \\ \vdots & & & & \ddots & & \vdots \\ (c_{l-1} - c_l)^T & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & -1 \end{bmatrix}, \ \tilde{b} := \begin{bmatrix} b \\ d_l - d_1 \\ \vdots \\ d_l - d_i \\ \vdots \\ d_l - d_{l-1} \end{bmatrix}, \ \tilde{c} := \begin{bmatrix} c_l \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (3.10)$$

実行可能内点を

$$\mathcal{F}^0 := \left\{ (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{s}) : \tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b}, \ \tilde{A}^T \tilde{y} + \tilde{s} = \tilde{c}, \ (\tilde{x}, \tilde{s}) > 0 \right\} \quad (3.11)$$

と表す．近傍を

$$\mathcal{N} := \left\{ (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{s}) \in \mathcal{F}^0 : \|\tilde{X}\tilde{s} - \mu e\|_2 \leq 0.4\mu \right\} \quad (3.12)$$

と表す．次のアルゴリズムを用いる．

step0: 初期点 $(\tilde{x}^0, \tilde{y}^0, \tilde{s}^0) \in \mathcal{N}$ が与えられる．終了基準 μ^* を与える．$\sigma := 1 - \dfrac{0.4}{\sqrt{n+l}}$, $\mu^0 := \dfrac{\tilde{x}^{0T}\tilde{s}^0}{n+l}$, $k := 0$ とする．

step1: もし終了基準 $\mu^k \leq \mu^*$ をみたすならば終了する．

step2: $\mu^k := \dfrac{\tilde{x}^{k^T}\tilde{s}^k}{n+l}$ として

$$\begin{aligned} \tilde{A}\Delta\tilde{x}^k &= 0 && (3.13a) \\ \tilde{A}^T \Delta\tilde{y}^k + \Delta\tilde{s}^k &= 0 && (3.13b) \\ \tilde{S}^k \Delta\tilde{x}^k + \tilde{X}^k \Delta\tilde{s}^k &= \sigma\mu^k e - \tilde{X}^k \tilde{s}^k && (3.13c) \end{aligned}$$

を解きニュートン方向 $(\Delta\tilde{x}^k, \Delta\tilde{y}^k, \Delta\tilde{s}^k)$ を得る．$\left(\tilde{x}^{k+1}, \tilde{y}^{k+1}, \tilde{s}^{k+1}\right) := \left(\tilde{x}^k, \tilde{y}^k, \tilde{s}^k\right) + \left(\Delta\tilde{x}^k, \Delta\tilde{y}^k, \Delta\tilde{s}^k\right)$ とする．

step3: $k := k+1$ として step1 に戻る．

3.2. 反復数

k 反復目を考える．等式制約は次の関係より成り立つ．

$$\tilde{A}\tilde{x}^{k+1} = \tilde{A}\tilde{x}^k = \tilde{b}, \quad (3.14)$$

$$\tilde{A}^T \tilde{y}^{k+1} + \tilde{s}^{k+1} = \tilde{A}^T \tilde{y}^k + \tilde{s}^k = \tilde{c}. \quad (3.15)$$

最適性の基準として使う双対ギャップについて，$\Delta\tilde{x}^{k^T}\Delta\tilde{s}^k = 0$ に注意すると，次の評価を得る．

$$\begin{aligned} \tilde{x}^{k+1^T}\tilde{s}^{k+1} &= \left(\tilde{x}^k + \Delta\tilde{x}^k\right)^T \left(\tilde{s}^k + \Delta\tilde{s}^k\right) \\ &= \tilde{x}^{k^T}\tilde{s}^k + \tilde{x}^{k^T}\Delta\tilde{s}^k + \tilde{s}^{k^T}\Delta\tilde{x}^k + \Delta\tilde{x}^{k^T}\Delta\tilde{s}^k \\ &= \left(1 - \frac{0.4}{\sqrt{n+l}}\right)(n+l)\mu^k. \end{aligned} \quad (3.16)$$

次の不等式が成り立つことよりアルゴリズムで得られる次の点も近傍に入る.

$$
\begin{aligned}
\left\|\tilde{X}^{k+1}\tilde{s}^{k+1}-\mu^{k+1}\right\|_2 &= \left\|\left(\tilde{X}^k+\Delta\tilde{X}^k\right)\left(\tilde{s}^k+\Delta\tilde{s}^k\right)-\mu^{k+1}\right\|_2 && (3.17)\\
&= \left\|\Delta\tilde{X}^k\Delta\tilde{s}^k\right\|_2 && (3.18)\\
&= \left\|D^{-1}\Delta\tilde{X}^k D\Delta\tilde{s}^k\right\|_2 \quad \text{ただし } D:=\tilde{X}^{k^{1/2}}\tilde{S}^{k^{-1/2}} && (3.19)\\
&\le \frac{\sqrt{2}}{4}\left\|D^{-1}\Delta\tilde{x}^k+D\Delta\tilde{s}^k\right\|_2^2 && (3.20)\\
&= \frac{\sqrt{2}}{4}\left\|\left(\tilde{X}^k\tilde{S}^k\right)^{-1/2}\left(\sigma\mu^k e-\tilde{X}^k\tilde{s}^k\right)\right\|_2^2 && (3.21)\\
&\le \frac{\sqrt{2}}{4}\frac{\left\|\tilde{X}^k s^k-\sigma\mu^k e\right\|_2^2}{\min\ \tilde{x}_i^k\tilde{s}_i^k} && (3.22)\\
&\le \frac{\sqrt{2}}{4}\frac{\left\|\left(\tilde{X}^k s^k-\mu^k e\right)+(1-\sigma)\,\mu^k e\right\|_2^2}{(1-0.4)\mu^k} && (3.23)\\
&\le \frac{\sqrt{2}}{4}\frac{0.4^2+(1-\sigma)^2(n+l)}{(1-0.4)}\mu^k && (3.24)\\
&\le \frac{32\sqrt{2}}{240}\mu^k && (3.25)\\
&\le 0.4\mu^{k+1}. && (3.26)
\end{aligned}
$$

正値性もなりたつ.

一反復で双対ギャップを $1-0.4/\sqrt{n+l}$ にできるので, アルゴリズムは $O(\sqrt{n+l}L)$ 反復で最適解を得ることができる.

4. ニュートン方向の計算

ニュートン方向は次の方程式系の解として得られる.

$$
\begin{aligned}
\tilde{A}\tilde{X}^k\tilde{S}^{k^{-1}}\tilde{A}^T\Delta\tilde{y}^k &= -\tilde{A}\tilde{S}^{k^{-1}}\left(\sigma\mu^k e-\tilde{X}^k\tilde{s}^k\right) && (4.1a)\\
\Delta\tilde{s}^k &= -\tilde{A}^T\Delta y^k && (4.1b)\\
\Delta\tilde{x}^k &= \tilde{S}^{k^{-1}}\left(\sigma\mu^k e-\tilde{X}^k\tilde{s}^k\right)-\tilde{X}^k\tilde{S}^{k^{-1}}\Delta\tilde{s}^k && (4.1c)
\end{aligned}
$$

最初の方程式系を解く計算量がアルゴリズム中最も多い．次の表記を使う．

$$\bar{A} := \begin{bmatrix} A \\ (c_1 - c_l)^T \\ \vdots \\ (c_i - c_l)^T \\ \vdots \\ (c_{l-1} - c_l)^T \end{bmatrix} \mathrm{diag}(x)\mathrm{diag}(v_x)^{-1} \begin{bmatrix} A \\ (c_1 - c_l)^T \\ \vdots \\ (c_i - c_l)^T \\ \vdots \\ (c_{l-1} - c_l)^T \end{bmatrix}^T + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & s_1 v_{s1}^{-1} & & & & \\ \vdots & & \ddots & & & \\ 0 & & & s_i v_{si}^{-1} & & \\ \vdots & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & s_{l-1} v_{sl-1}^{-1} \end{bmatrix}. \tag{4.2}$$

係数行列は次のように表せる．

$$\tilde{A}\tilde{X}^k \tilde{S}^{k^{-1}} \tilde{A}^T = \bar{A} + s_l v_{s_l}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ e \end{bmatrix}^T. \tag{4.3}$$

A と $D + DCA^{-1}BD$ を正則行列として Sherman-Morrison-Woodbury の公式 [4]

$$(A + BDC)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}BD\left(D + DCA^{-1}BD\right)^{-1} DCA^{-1} \tag{4.4}$$

が成り立つことより，次の関係が成り立つ．

$$\begin{aligned} &\left(\tilde{A}\tilde{X}^k \tilde{S}^{k^{-1}} \tilde{A}^T\right)^{-1} \\ &= \left(\bar{A} + s_l v_{s_l}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ e \end{bmatrix}^T\right)^{-1} \\ &= \bar{A}^{-1} - \bar{A} \begin{bmatrix} 0 \\ e \end{bmatrix} s_l v_{s_l}^{-1} \left(s_l v_{s_l}^{-1} + s_l v_{s_l}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ e \end{bmatrix}^T \bar{A}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ e \end{bmatrix} s_l v_{s_l}^{-1}\right)^{-1} s_l v_{s_l}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ e \end{bmatrix}^T \bar{A}^{-1} \\ &= \bar{A}^{-1} - \frac{s_l v_{s_l}^{-1}}{1 + s_l v_{s_l}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ e \end{bmatrix}^T \bar{A}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ e \end{bmatrix}} \bar{A}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ e \end{bmatrix}^T \bar{A}^{-1}. \end{aligned} \tag{4.5}$$

$\bar{A}$ が疎のとき，$\bar{A}$ を Cholesky 分解して逆行列表現を得て，上の関係を使いニュートン方向を得られる．

5. 結論と今後の課題

本稿では，区分線形凸計画問題を考えた．この問題に対する多項式オーダーの解法を提案した．その手法では，区分線形凸計画問題を標準形の線形計画問題に変換し，主双対内点法を適用した．アルゴリズムの多項式オーダー性を示し，ニュートン方向の計算の工夫を記述した．

今後の課題としては，制約に区分線形関数がある問題を考えること，非負制約の代わりに，半正定値制約，二次錐制約がある問題を考えることがある．

参考文献

[1] D. Bertsimas and J. N. Tsitsiklis: *Introduction to Linear Optimization*, Athena Scientific (1997).

[2] G. B. Dantzig and M. N. Thapa: *Linear Programming 1:Introduction*, Springer (1997).

[3] G. B. Dantzig and M. N. Thapa: *Linear Programming 2:Theory and Extensions*, Springer (2003).

[4] 伊理正夫: 一般線形代数, 岩波書店 (2003).

[5] K. Kobayashi, K. Nakata and M. Kojima: A Conversion of an SDP Having Free Variables into the Standard Form SDP, Computational Optimization and Applications, to appear.

[6] S. J. Wright: *Primal-Dual Interior-Point Method*, SIAM Publications (1997).